
بسم الله الرحمن الرحیم

پایداری سیستم‌های گسسته کسری با پس‌خورد خروجی

نگارنده: نام

استاد راهنما:

استاد راهنما

۱۳۹۵

فهرست

فهرست

- تعاریف

فهرست

فهرست

فهرست

فهرست

- تعاریف
- سیستم‌های دو بعدی و کنترل آن
- پایداری سیستم‌های خطی کسری مثبت با پس‌خورد حالت
- سیستم‌های خطی دو بعدی کسری
- پایداری سیستم‌های خطی دو بعدی کسری شرح داده شده توسط مدل راسر

فهرست

فهرست

فهرست

تعاریف اولیه

بردار ویژه و مقادیر ویژه

فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد. مجموعه ریشه‌های چندجمله‌ای

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \tag{۱}$$

که به چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس A موسوم است، طیف ماتریس A نامیده می‌شود و اغلب با نماد $\Lambda(A)$ نشان داده می‌شود. به هر عضو از $\Lambda(A)$ مقدار ویژه ماتریس A گفته می‌شود.

تعاریف اولیه

ماتریس متلر

ماتریس $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک ماتریس متلر نامیده می‌شود اگر همه‌ی درایه‌های خارج قطر اصلی نامنفی باشند. یعنی:

$$\forall\, i \neq j, i, j = ۱, ۲, \cdots, n \Rightarrow a_{ij} \geqslant ۰$$

تعاریف اولیه

ماتریس متلر

ماتریس $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک ماتریس متلر نامیده می‌شود اگر همه‌ی درایه‌های خارج قطر اصلی نامنفی باشند. یعنی:

$$\forall\, i \neq j, i, j = ۱, ۲, \cdots, n \Rightarrow a_{ij} \geqslant ۰$$

ماتریسM

ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک M ماتریس نامیده می‌شود اگر درایه‌های قطر اصلی نامنفی و درایه‌های خارج قطر (غیر قطری) نامثبت باشند.

صورت کلی معادلات فضای حالت

صورت کلی معادلات فضای حالت

صورت کلی معادلات فضای حالت به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f[x(t), u(t), t] \\ y(t) &= g[x(t), u(t), t] \end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن $x_{n\times 1}$ بردار حالت است و عناصر $x_1, x_2, \cdots, x_n$ را متغیرهای حالت می‌نامند. $u_{m\times 1}$ و $y_{k\times 1}$ به‌ترتیب بردارهای ورودی و خروجی هستند. در حالت کلی f و g نیز توابع متغیر با زمان هستند که نحوه ارتباط بردارهای حالت، ورودی و خروجی را نشان می‌دهند.

کنترل پذیری

کنترل پذیری

کنترل‌پذیری سیستم

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{۳}$$

اغلب به کنترل‌پذیری زوج (A, B) اشاره دارد.
برای سیستم توصیف شده با معادله تفاضلی (۳) ماتریس کنترل‌پذیری را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^۲B & \cdots & A^{n-۱}B \end{bmatrix} \tag{۴}$$

ناورداهای کرونکر

اگر این n بردار مستقل خطی را به‌ترتیب ستون‌های ماتریس P قرار دهیم آنگاه P معکوس‌پذیر خواهد بود و تبدیل مورد نظر به‌دست می‌آید.

$$P = \left[b_1 \cdots b_m \;\; Ab_1 \cdots Ab_m \cdots A^{p_1-1}b_1 \cdots A^{p_m-1}b_m\right] \tag{5}$$

اندیس کنترل پذیری

v را اندیس کنترل‌پذیری می‌نامیم، و تعریف می‌کنیم:

$$v = \max\{p_i | i = 1, \cdots, m\} \tag{6}$$

حالت تعادل

حالت تعادل

حالت تعادل برای یک سیستم کنترل خطی، حالتی است که در صورت نبود ورودی و اغتشاش، خروجی در آن حالت باقی بماند.

حالت تعادل

حالت تعادل

حالت تعادل برای یک سیستم کنترل خطی، حالتی است که در صورت نبود ورودی و اغتشاش، خروجی در آن حالت باقی بماند.

ناورداهای کرونکر منظم و نامنظم

ناورداهای کرونکر (B, A) را منظم گوییم هرگاه اختلاف بین $\max$ و $\min$ آن‌ها حداکثر یک باشد. در غیر این‌صورت ناورداهای کرونکر را نامنظم گویند.

حالت تعادل

حالت تعادل

حالت تعادل برای یک سیستم کنترل خطی، حالتی است که در صورت نبود ورودی و اغتشاش، خروجی در آن حالت باقی بماند.

ناورداهای کرونکر منظم و نامنظم

ناورداهای کرونکر (B, A) را منظم گوییم هرگاه اختلاف بین $\max$ و $\min$ آن‌ها حداکثر یک باشد. در غیر این‌صورت ناورداهای کرونکر را نامنظم گویند.

پایداری

در معادله دیفرانسیل $\dot{x}(t) = f(x(t))$، نقطه x_e را نقطه تعادل می‌نامند هرگاه $f(x_e) = ۰$.

پایداری به مفهوم لیاپانوف

پایداری به مفهوم لیاپانوف

سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(t_{\cdot}) \in \mathbb{R}^n \end{cases} \qquad (\text{۷})$$

نقطه تعادل x_e را به مفهوم لیاپانوف پایدار گوییم، اگر به‌ازای $t_{\cdot}$ و $\epsilon > \cdot$، برای تمامی $t \geq t_{\cdot}$:

$$\exists\, \delta_\epsilon > \cdot ;\ \forall \ \| x(t_{\cdot}) - x_e \| < \delta_\epsilon \longrightarrow \| x(t) - x_e \| \leq \epsilon$$

سیستم کنترل حلقه باز

سیستم‌هایی که در آن‌ها خروجی بر عمل کنترلی تاثیر ندارد را سیستم‌های کنترل حلقه باز گویند.

سیستم کنترل حلقه باز

سیستم‌هایی که در آن‌ها خروجی بر عمل کنترلی تاثیر ندارد را سیستم‌های کنترل حلقه باز گویند.

سیستم کنترل حلقه بسته

سیستم‌های کنترل پس‌خوردی را عموماً سیستم‌های کنترل حلقه بسته می‌نامیم. منظور از کنترل حلقه بسته استفاده از پس‌خورد برای کاهش خطا و رسیدن به پایداری است.

توجه

زمانی که حالت‌های ناپایدار، کنترل‌پذیر باشند،پایداری تضمین شده است.

توجه

زمانی که حالت‌های ناپایدار، کنترل‌پذیر باشند،پایداری تضمین شده است.

سیستم پایدار مجانبی

سیستم کنترل خطی را یک سیستم پایدار مجانبی می‌نامیم هرگاه قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه منفی باشد.
درصورتی‌که قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه منفی یا صفر باشد سیستم را پایدار و در غیر این دو صورت سیستم را ناپایدار گویند.

توجه

زمانی که حالت‌های ناپایدار، کنترل‌پذیر باشند،پایداری تضمین شده است.

سیستم پایدار مجانبی

سیستم کنترل خطی را یک سیستم پایدار مجانبی می‌نامیم هرگاه قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه منفی باشد.
درصورتی‌که قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه منفی یا صفر باشد سیستم را پایدار و در غیر این دو صورت سیستم را ناپایدار گویند.

مساله تخصیص مقادیر ویژه

مسأله یافتن ماتریس پس‌خورد K برای سیستم کنترل خطی به‌گونه‌ای که سیستم پایدار باشد را مسأله تخصیص مقادیر ویژه گویند.

مدل‌های فضای حالت سیستم‌های خطی دو بعدی گسسته

مدل راسر

مدل راسر دو بعدی برای سیستم‌های گسسته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i,j), \tag{۸}$$

$$y(i,j) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + Du(i,j). \tag{۹}$$

با شرایط مرزی

$$\begin{cases} x^h(0,j) = x_0^h(j), & \forall j \in \mathbb{N}, \\ x^v(i,0) = x_0^v(i), & \forall i \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{۱۰}$$

مدل‌های فضای حالت سیستم‌های خطی دو بعدی گسسته

مدل کلی

مدل کلی دو بعدی برای سیستم های گسسته به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} x(i+1, j+1) = \quad & A_0 x(i, j) + A_1 x(i+1, j) + A_2 x(i, j+1) \\ & + B_0 u(i, j) + B_1 u(i+1, j) + B_2 u(i, j+1), \end{aligned} \tag{11}$$

$$y(i, j) = Cx(i, j) + Du(i, j). \tag{12}$$

با شرایط مرزی

$$x(i, 0) \in \mathbb{R}^n,\ x(0, j) \in \mathbb{R}^n, \quad i, j \in \mathbb{Z}^+, \tag{13}$$

مدل‌های فضای حالت سیستم‌های خطی دو بعدی گسسته

مدل فورناسا-مارکسینی نوع اول $(FF-MM)$

مدل فورسانا-مارکسینی نوع اول $(FF-MM)$ توسط معادلات زیر تعریف می‌شود:

$$x(i+1,j+1)=A_0x(i,j)+A_1x(i+1,j)+A_2x(i,j+1)+Bu(i,j), \qquad (۱۴)$$

$$y(i,j)=Cx(i,j)+Du(i,j). \qquad (۱۵)$$

با شرایط مرزی

$$x(i,0)\in\mathbb{R}^n,\ x(0,j)\in\mathbb{R}^n,\quad i,j\in\mathbb{Z}^+, \qquad (۱۶)$$

مدل‌های فضای حالت سیستم‌های خطی دو بعدی گسسته

مدل فورناسا-مارکسینی نوع دوم $(FM-MM)$

مدل فورناسا-مارکسینی نوع دوم $(FM-MM)$ توسط معادلات زیر بیان می‌شود:

$$x(i+1,j+1) = A_1x(i+1,j) + A_2x(i,j+1) + B_1u(i+1,j) + B_2u(i,j+1), \quad (۱۷)$$

$$y(i,j) = Cx(i,j) + Du(i,j). \quad (۱۸)$$

با شرایط مرزی

$$x(i,0) \in \mathbb{R}^n,\ x(0,j) \in \mathbb{R}^n, \quad i,j \in \mathbb{Z}^+, \quad (۱۹)$$

پایداری سیستم‌های خطی دو بعدی توصیف شده توسط مدل راسر

قضیه

سیستم راسر حلقه بسته برای هر شرایط اولیه مرزی نامنفی، مثبت و پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر $n+۱$ بردار و موجود باشند به قسمی که

$$\begin{cases} (A-I_n)d + B(\sum^n y_i) < 0, \\ d > 0, \\ a_{ij}d_j + b_i y_i \geq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n. \end{cases} \quad (۲۰)$$

که در آن $\begin{bmatrix} b_۱^T & \cdots & b_n^T \end{bmatrix}$ = B^T، $A = [a_{ij}]$ و $n = n_۱ + n_۲$ و سرانجام ماتریس پس‌خورد حالت F به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F = \begin{bmatrix} d_1^{-1}y_1 & \cdots & d_n^{-1}y_n \end{bmatrix}. \quad (۲۱)$$

پایداری سیستم‌های خطی دو بعدی توصیف شده توسط مدل راسر

قضیه

عبارات زیر معادلند:

۱. یک قانون پس‌خورد حالت مثبت $u(i,j) = F \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} \geq ۰$ موجود است به قسمی‌که سیستم حلقه بسته راسر

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^h(i,j+1) \end{bmatrix} = (A+BF) \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^h(i,j) \end{bmatrix}, \qquad (۲۲)$$

برای هر شرط اولیه مرزی مثبت و پایدار مجانبی است.

۲. یک ماتریس $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ موجود است به قسمی‌که $F > ۰$ و $A+BF$ یک ماتریس شور نامنفی است ($p(A+BF) < ۱$).

پایداری سیستم‌های خطی دو بعدی توصیف شده توسط مدل راسر

ادامه قضیه

۳. مساله LP زیر را با متغیرهای $d = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots, d_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$ و $y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{R}^m$ شدنی است.

$$\begin{cases} (A - I_n)d + B(\sum_{i=1}^{n} y_i) < 0, \\ d > 0, \\ y_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n, \\ a_{ij}d_j + b_i y_j \geq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n. \end{cases} \tag{۲۳}$$

که در آن $A = [a_{ij}]$، $B^T = \begin{bmatrix} b_1^T & \cdots & b_n^T \end{bmatrix}$ و $n = n_1 + n_2$. سرانجام ماتریس پس‌خورد حالت F به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F = \begin{bmatrix} d_1^{-1} y_1 & \cdots & d_n^{-1} y_n \end{bmatrix}. \tag{۲۴}$$

که در آن d و $y_1, \cdots, y_n$ هر جواب شدنی دلخواه از مساله LP بالا می‌باشند.

سیستم کسری مثبت

تفاضلات کسری

تفاضلات کسری به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Delta^{\alpha} x_k = \sum_{j=۰}^{k} (-۱)^j \binom{\alpha}{j} x_{k-j}, \quad ۰ < \alpha < ۱, \qquad (۲۵)$$

که در آن $\alpha \in \mathbb{R}$ مرتبه تفاضلات کسری و

$$\binom{\alpha}{j} = \begin{cases} ۱, & j = ۰, \\ \frac{\alpha(\alpha - ۱)\cdots(\alpha - j + ۱)}{j!}, & j = ۱, ۲, \cdots. \end{cases} \qquad (۲۶)$$

سیستم کسری مثبت

سیستم خطی

$$\Delta^{\alpha} x_{k+۱} = Ax_k + Bu_k,$$

$$y_k = Cx_k + Du_k,$$

که در آن $x_k \in \mathbb{R}^n$، $u_k \in \mathbb{R}^m$ و $y_k \in \mathbb{R}^p$، $k \in \mathbb{Z}_+$ بردارهای حالت ورودی و خروجی و $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$، $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ و $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ هستند. که می‌توانیم روابط بالا را به فرم زیر نیز بنویسیم:

$$x_{k+۱} + \sum_{j=۱}^{k+۱} (-۱)^j \binom{\alpha}{j} x_{k-j+۱} = Ax_k + Bu_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \qquad (۲۷)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k. \qquad (۲۸)$$

پایداری عملی

قضیه

سیستم کسری مثبت (۲۷) و (۲۸) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر شرایط معادل زیر برقرار باشند:

الف. مقادیر ویژه $z_۱, z_۲, \cdots, z_k$ از ماتریس $A + I_n$ قدر نسبت کم‌تر از یک داشته باشند یعنی $|z_k| < ۱$ برای $k = ۱, \cdots, n$،

ب. همه ضرایب چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A مثبت باشند،

پ. همه مینورهای پیشرو اصلی ماتریس $-A$ مثبت باشند.

پایداری عملی

قضیه

سیستم کسری مثبت (۲۷) و (۲۸) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر شرایط معادل زیر برقرار باشند:

الف. مقادیر ویژه $z_۱, z_۲, \cdots, z_k$ از ماتریس $A + I_n$ قدر نسبت کم‌تر از یک داشته باشند یعنی $|z_k| < ۱$ برای $k = ۱, \cdots, n$،

ب. همه ضرایب چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A مثبت باشند،

پ. همه مینورهای پیشرو اصلی ماتریس $-A$ مثبت باشند.

قضیه

سیستم کسری مثبت (۲۷) و (۲۸) پایدار مجانبی است اگر حداقل یکی از ورودی‌های خارج از قطر ماتریس A مثبت باشد.

پایداری عملی

مثال

مقدار ضرایب c را برای سیستم کسری مثبت (۲۷) و (۲۸) با

$$A = \begin{bmatrix} -۰.۵ & ۱ \\ ۰.۲ & c \end{bmatrix}, \quad \alpha = ۰.۸, \qquad (۲۹)$$

که پایدار مجانبی است، پیدا می‌کنیم.

$$det[I_n z - A] = \begin{vmatrix} z + ۰.۵ & -۱ \\ -۰.۲ & z - c \end{vmatrix} = z^۲ + (۰.۵ - c)z - (۰.۵c + ۰.۲),$$

و $c < -۰.۴$. بنابراین سیستم کسری (۲۷) و (۲۸) با مفروضات مساله برای $-۰.۸ \le c < -۰.۴$ مثبت و پایدار مجانبی هستند.

سیستم کسری مثبت

تعریف

مشتق کسری مرتبه (α,β) تابع دو بعدی x_{ij} به صورت رابطه (۳۰) تعریف می‌شود:

$$\begin{gathered}\Delta^{\alpha,\beta} x_{ij} = \sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j} c_{\alpha\beta}(k,l) x_{i-k,j-l}, \\ n_1 - 1 < \alpha < n_1,\ \ n_2 - 1 < \beta < n_2, \\ n_1, n_2 \in \mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\},\end{gathered} \tag{۳۰}$$

که در آن $\Delta^{\alpha,\beta} x_{ij} = \Delta^{\alpha} \Delta^{\beta} x_{ij}$ و

$$c_{\alpha,\beta}(k,l) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \quad k = 0,\ l = 0, \\ (-1)^{k+1} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\beta(\beta-1)\cdots(\beta-l+1)}{k!\, l!}, \\ k, l \geq 0,\ k + l > 0. \end{array} \right. \tag{۳۱}$$

سیستم کسری مثبت

ادامه تعریف

فرض می‌کنیم سیستم‌های خطی کسری دو بعدی مرتبه (α, β) با معادلات حالت زیر نشان داده شوند:

$$\Delta^{\alpha,\beta} x_{i+1,j+1} = A_0 x_{ij} + A_1 x_{i+1,j} + A_2 x_{i,j+1} + B_0 u_{ij} + B_1 u_{i+1,j} + B_2 u_{i,j+1}, \qquad (۳۲)$$

$$y_{ij} = C x_{ij} + D u_{ij}, \qquad (۳۳)$$

با شرایط مرزی:

$$x_{i0},\ i \in \mathbb{Z}_+, \ \text{و} \ x_{0j},\ j \in \mathbb{Z}_+, \qquad (۳۴)$$

پایداری مجانبی

در این بخش پایداری عملی سیستم‌های خطی کسری دو بعدی مثبت را برای $L_۱ \to \infty$ و $L_۲ \to \infty$ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف

سیستم کسری دو بعدی مثبت (۳۲) و (۳۳) پایدار مجانبی نامیده می‌شود اگر این سیستم برای $L_۱ \to \infty$ و $L_۲ \to \infty$ پایدار عملی باشد.

پایداری مجانبی

در این بخش پایداری عملی سیستم‌های خطی کسری دو بعدی مثبت را برای $L_۱ \to \infty$ و $L_۲ \to \infty$ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف

سیستم کسری دو بعدی مثبت (۳۲) و (۳۳) پایدار مجانبی نامیده می‌شود اگر این سیستم برای $L_۱ \to \infty$ و $L_۲ \to \infty$ پایدار عملی باشد.

قضیه

سیستم کسری دو بعدی (۳۲) و (۳۳) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر سیستم یک بعدی مثبت

$$x_{i+۱} = (\hat{A} + I_n)x_i, \quad \hat{A} = A_۰ + A_۱ + A_۲, \quad x_i \in \mathbb{R}_+^n, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \qquad (۳۵)$$

پایدار مجانبی باشد.

پایداری مجانبی

قضیه

سیستم کسری دو بعدی (۳۲) و (۳۳) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر یکی از شرایط معادل زیر برقرار باشد:

الف. مقادیر ویژه $z_{1},\cdots,z_n$ از ماتریس $A+I_n$ قدر نسبت کم‌تر از یک داشته باشند.

ب. همه ضرایب چندجمله‌ای مشخصه ماتریس $\widehat{A}$ مثبت باشند.

پ. همه مینورهای اصلی پیشرو ماتریس $-\widehat{A}$ مثبت باشند.

پایداری مجانبی

قضیه

سیستم کسری دو بعدی (۳۲) و (۳۳) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر یکی از شرایط معادل زیر برقرار باشد:

الف. مقادیر ویژه $z_۱, \cdots, z_n$ از ماتریس $A + I_n$ قدر نسبت کم‌تر از یک داشته باشند.

ب. همه ضرایب چندجمله‌ای مشخصه ماتریس $\widehat{A}$ مثبت باشند.

پ. همه مینورهای اصلی پیشرو ماتریس $-\widehat{A}$ مثبت باشد.

قضیه

سیستم کسری دو بعدی (۳۲) و (۳۳) ناپایدار است اگر حداقل یکی از ورودی‌های قطر اصلی ماتریس $\widehat{A}$ مثبت باشد.

پایداری مجانبی

مثال

پایداری مجانبی سیستم کسری دو بعدی (۳۲) و (۳۳) را برای $\alpha = ۰.۳$ و $\beta = ۱.۲$ با ماتریس‌های

$$A_{۰} = \begin{bmatrix} ۰.۴ & ۰ \\ ۰.۱ & ۰.۵ \end{bmatrix}, \quad A_{۱} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰.۲ & -۱.۱ \end{bmatrix}, \quad A_{۲} = \begin{bmatrix} -۰.۲ & ۰ \\ ۰.۲ & ۰.۱ \end{bmatrix}, \tag{۳۶}$$

بررسی می‌کنیم.

پایداری مجانبی

ادامه مثال

که خواهیم داشت:

$$det[I_n z-\widehat{A}]=\begin{vmatrix} z+۰.۸ & ۰ \\ -۰.۵ & z+۰.۵ \end{vmatrix}=z^{۲}+۱.۳z+۰.۴, \qquad (۳۷)$$

همه مینورهای اصلی پیشرو ماتریس

$$-\widehat{A}=\begin{bmatrix} ۰.۸ & ۰ \\ -۰.۵ & ۰.۵ \end{bmatrix}, \qquad (۳۸)$$

مثبت هستند یعنی $\Delta_۱ = ۰.۸$ و $\Delta_۲ = ۰.۴$.

پایداری مجانبی

قضیه

سیستم حلقه بسته کسری

$$\begin{bmatrix} x^h_{i+1,j} \\ x^v_{i,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} + B_1K_1 & A_{12} + B_1K_2 \\ A_{21} + B_2K_2 & \bar{A}_{22} + B_2K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h_{i,j} \\ x^v_{i,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{i+1} c_\alpha(k) x^h_{i-k+1,j} \\ \sum_{l=2}^{j+1} c_\beta(l) x^h_{i,j-l+1} \end{bmatrix}, \qquad (39)$$

مثبت و پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر ماتریس بلوک قطری متناهی مثبت

$$\begin{aligned} \Lambda &= blockdiag[\Lambda_1, \Lambda_2], \\ \Lambda_k &= diag[\Lambda_{k1}, \cdots, \Lambda_{kn_k}], \\ \lambda_{kj} &> 0,\ k = 1, 2,\ j = 1, \cdots, n_k, \end{aligned} \qquad (40)$$

پایداری مجانبی

ادامه قضیه

و ماتریس حقیقی

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \end{bmatrix}, \quad D_k \in \mathbb{R}^{m\times n_k}, \quad k = 1, 2, \qquad (41)$$

وجود داشته باشد به طوری که در شرایط

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11}\Lambda_1 + B_1 D_1 & A_{12}\Lambda_2 + B_1 D_2 \\ A_{21}\Lambda_1 + B_2 K D 1 & \bar{A}_{22}\Lambda_2 + B_2 D_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, \qquad (42)$$

صدق کند و LMI

$$\begin{bmatrix} -\Lambda & A\Lambda + BD \\ (A\Lambda + BD)^T & -\Lambda \end{bmatrix} \prec 0, \qquad (43)$$

با توجه به ماتریس قطری متناهی مثبت Λ شدنی باشد.

پایداری مجانبی

مثال

مدل کسری دو بعدی راسر با $\alpha = ۰.۴$ و $\beta = ۰.۹$ و

$$
\begin{aligned}
A_{۱۱} &= \begin{bmatrix} -۰.۴ & ۰.۰۱ \\ ۰.۰۳ & ۰.۰۰۱ \end{bmatrix}, \quad A_{۱۲} = \begin{bmatrix} ۰.۰۱ & ۰.۰۱ \\ ۰.۰۱ & ۰.۲ \end{bmatrix}, \\
A_{۲۱} &= \begin{bmatrix} ۰.۰۱ & ۰.۲ \\ ۰ & ۰.۰۱ \end{bmatrix}, \quad A_{۱۲} = \begin{bmatrix} -۰.۹ & ۰.۰۱ \\ ۰.۰۱ & -۰.۸ \end{bmatrix}, \\
B_{۱} &= \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰.۰۰۱ \end{bmatrix}, \quad B_{۲} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰.۰۰۲ \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{۴۴}
$$

را در نظر بگیرید. ماتریس افزوده $K = [K_{۱} \ K_{۲}]$، $K_i \in \mathbb{R}^{۱\times ۲}$، $i = ۱, ۲$ را طوری پیدا کنید که سیستم حلقه بسته مثبت و پایدار مجانبی باشد.

پایداری مجانبی

ادامه مثال

مدل کسری دو بعدی راسر با رابطه (۴۴) پایدار است زیرا ماتریس

$$\begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰.۴ & ۰.۰۱ & ۰.۰۱ & ۰.۰۱ \\ ۰.۰۳ & ۰.۰۰۱ & ۰.۰۱ & ۰.۲ \\ ۰.۰۱ & ۰.۲ & -۰.۹ & ۰.۰۱ \\ ۰ & ۰.۰۱ & ۰.۰۱ & -۰.۸ \end{bmatrix}, \tag{۴۵}$$

ورودی‌های قطری مثبت دارد.

انتخاب می‌کنیم

$$D = \begin{bmatrix} D_{۱} & D_{۲} \end{bmatrix},\ D_{۱} = \begin{bmatrix} ۰.۱۳ & -۰.۳۷ \end{bmatrix},\ D_{۲} = \begin{bmatrix} -۳.۱۹ & -۰.۱۱ \end{bmatrix}. \tag{۴۶}$$

پایداری مجانبی

ادامه مثال

$$\Lambda = blockdiag[\Lambda_۱, \Lambda_۲], \quad \Lambda_۱ = \begin{bmatrix} ۰.۰۵۵۴ & ۰ \\ ۰ & ۰.۰۷۵۵ \end{bmatrix}, \ \Lambda_۲ = \begin{bmatrix} ۰.۸۶۵۹ & ۰ \\ ۰ & ۰.۰۰۳۲ \end{bmatrix}. \quad (۴۷)$$

بنابراین LMI با توجه به ماتریس قطری Λ شدنی است.
سپس ماتریس افزوده را به دست می‌آوریم:

$$K = \begin{bmatrix} K_۱ & K_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_۱\Lambda_۱^{-۱} & D_۲\Lambda_۲^{-۱} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲.۳۴۶۰ & -۴.۹۰۳۵ & -۳.۶۸۴۰ & -۳۴.۱۰۵۸ \end{bmatrix}. \quad (۴۸)$$

پایداری مجانبی

ادامه مثال

سیستم حلقه بسته مثبت است زیرا ماتریس‌های

$$\bar{A}_{۱۱} + B_{۱}K_{۱} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰.۰۱ \\ ۰.۰۳۲۳ & ۰.۳۹۶۱ \end{bmatrix},$$

$$A_{۱۲} + B_{۱}K_{۲} = \begin{bmatrix} ۰.۰۱ & ۰.۰۱ \\ ۰.۰۰۶۳ & ۰.۱۶۵۹ \end{bmatrix},$$

$$A_{۲۱} + B_{۲}K_{۱} = \begin{bmatrix} ۰.۰۱ & ۰.۲ \\ ۰.۰۰۴۷ & ۰.۰۰۰۲ \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_{۲۲} + B_{۲}K_{۲} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰.۰۱ \\ ۰.۰۰۲۶ & ۰.۰۳۱۸ \end{bmatrix},$$

همه ورودی‌هایشان نامنفی است.

پایداری مجانبی

ادامه مثال

سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی است زیرا چندجمله‌ای مشخصه

$$det\begin{bmatrix} I_{n_۱}z-(A_{۱۱}+B_۱K_۱) & -(A_{۱۲}+B_۱K_۲) \\ -(A_{۲۱}+B_۲K_۱) & I_{n_۲}z-(\bar{A}_{۲۲}+B_۲K_۲) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} z+۰.۴ & -۰.۰۱ & -۰.۰۱ & -۰.۰۱ \\ -۰.۰۳۲۳ & z+۰.۰۰۳۹ & -۰.۰۰۶۳ & -۰.۱۶۵۹ \\ -۰.۰۱ & -۰.۲ & z+۰.۹ & -۰.۰۱ \\ -۰.۰۰۴۷ & -۰.۰۰۰۲ & -۰.۰۰۲۶ & z+۰.۸۶۸۲ \end{vmatrix} =$$

$$z^۴+۲.۱۷۲۱z^۳+۱.۴۹۵۳z^۲+۰.۳۱۵۹z+۰.۰۰۰۴$$

ضرایب مثبت دارد.

فرض کنید سیستم‌های خطی دوبعدی کسری از مرتبه α با معادلات حالت $(۲a)$ شرح داده شوند:

$$\Delta^{\alpha} x_{i+۱,j+۱} = A_{.} x_{ij} + A_{۱} x_{i+۱,j} + A_{۲} x_{i,j+۱} + B_{.} u_{ij} + B_{۱} u_{i+۱,j} + B_{۲} u_{i,j+۱} \qquad (۲a)$$

$$y_{ij} = C x_{ij} + D u_{ij} \qquad (۲b)$$

(۴۹)

با شرایط مرزی

$$x_{i.}, \ i \in \mathbb{Z}_{+}, \quad x_{.j}, \ j \in \mathbb{Z}_{+}. \qquad (۵۰)$$

قضیه

فرض کنیم رابطه

$$det\bar{G}(z_۱, z_۲) = \sum_{k=۰}^{N_۱} \sum_{l=۰}^{N_۲} a_{N_۱-k,N_۲-l} z_۱^{-k} z_۲^{-l}. \quad (۵۱)$$

چندجمله‌ای سیستم (۴۹) را مشخص کند در این‌صورت ماتریس T_{kl} در رابطه‌ی (۵۲) صدق می‌کند:

$$\sum_{k=۰}^{N_۱} \sum_{l=۰}^{N_۲} a_{kl} T_{kl} = ۰. \quad (۵۲)$$

رویت‌پذیری و کنترل پذیری به صفر

تعریف قابل رویت

سیستم دوبعدی کسری (۴۹) قابل رویت در نقطه $(h,k) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ نامیده می‌شود اگر و تنها اگر برای شرایط مرزی صفر در رابطه (۵۰) $(x_{i.} = ۰, i \in \mathbb{Z}_+, x_{.j} = ۰, j \in \mathbb{Z}_+)$ و هر بردار $x_f \in \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد یک دنباله از ورودی‌های $u_{ij} \in \mathbb{R}^m$ برای

$$(i,j) \in D_{hk} = \{(i,j) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ : ۰ \leq i \leq h,\ ۰ \leq j \leq k,\ i+j \neq h+k\} \qquad (۵۳)$$

به‌طوری‌که $x_{hk} = x_f$.

رویت‌پذیری و کنترل پذیری به صفر

قضیه

سیستم دوبعدی کسری (۴۹) قابل رویت در نقطه (h,k) است اگر و تنها اگر ماتریس

$$R_{hk}=[M_{0},M_{1}^{1},\cdots,M_{h2}^{1},M_{1}^{2},\cdots,M_{k}^{2},M_{11},\cdots,M_{1k},M_{21},\cdots,M_{hk}]$$

رتبه‌ی سطری کامل داشته باشد. یعنی

$$Rank()=n, \tag{۵۴}$$

رویت‌پذیری و کنترل پذیری به صفر

قضیه

سیستم دوبعدی کسری (۴۹) قابل رویت در نقطه (h, k) است اگر و تنها اگر ماتریس

$$R_{hk} = [M_{۰}, M_{۱}^{۱}, \cdots, M_{h۲}^{۱}, M_{۱}^{۲}, \cdots, M_{k}^{۲}, M_{۱۱}, \cdots, M_{۱k}, M_{۲۱}, \cdots, M_{hk}]$$

رتبه‌ی سطری کامل داشته باشد. یعنی

$$Rank() = n, \qquad (۵۴)$$

قضیه

سیستم دوبعدی کسری (۴۹) در نقطه (h, k) کنترل پذیر به صفر است اگر و تنها اگر شرایط (۵۴) برقرار باشد.

رویت‌پذیری و کنترل پذیری به صفر

در این بخش از مشتقات کسری تعریف کاپوتو استفاده خواهد شد.

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\pi-\alpha)}\int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}d\tau, \tag{55}$$

و سیستم‌های خطی کسری که به صورت معادله زیر تعریف می‌شوند را در نظر بگیرید:

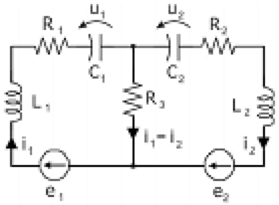
$$\begin{bmatrix} \frac{d^\alpha x_1}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\beta x_2}{dt^\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}u, \quad p-1<\alpha<p,\ q-1<\beta<q,\ \ p,q\in\mathbb{N}, \tag{56}$$

مثال

در این مثال نشان می‌دهیم که مدارهای الکتریکی خطی متشکل از مقاومت‌ها، ابر رساناها، کویل و ولتاژ منبع فعلی سیستم‌های مثبت با مشتقات کسری هستند.

مثال

مدارهای الکتریکی خطی را که در شکل ۱ نشان داده شده است را در نظر بگیرید.



شکل: مدار الکتریکی

مثال

ادامه مثال

مقاومت‌ها با R_1، R_2 و R_3، ظرفیت‌ها با C_1 و C_2، ظرفیت‌های القایی مغناطیسی با L_1 و L_2 و منابع ولتاژها با e_1 و e_2 نشان داده شده است. از رابطه

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L_1} & 0 & -\frac{R_1+R_2}{L_1} & \frac{R_3}{L_1} \\ 0 & -\frac{1}{L_2} & \frac{R_3}{L_2} & -\frac{R_2+R_3}{L_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \qquad (57)$$

می‌بینیم که مدارهای الکتریکی خطی مثبت نیستند چون در ماتریس A برخی از ورودی‌ها خارج از قطرش منفی هستند.

مثال

ادامه مثال

اگر مدارهای الکتریکی خطی مثبت نباشند اما ماتریس B ورودی‌های نامنفی داشته باشد سپس از پس خورد حالت استفاده می‌کنیم:

$$e = K\begin{bmatrix} x_C \\ x_L \end{bmatrix} \tag{۵۸}$$

حال فرض کنید:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{c_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c_2} \\ \frac{a_1}{L_1} & 0 & -\frac{R_1+R_3}{L_1} & \frac{a_3}{L_1} \\ 0 & \frac{a_2}{L_2} & \frac{a_4}{L_2} & -\frac{R_2+R_3}{L_2} \end{bmatrix}, \tag{۵۹}$$

برای $a_k \geq 0$، $k = 1, 2, 3, 4$.

مثال

ادامه مثال

در این حالت شرایط رابطه

$$rank[B, A_c - A] = rankB. \tag{۶۰}$$

برقرار می‌شود. رابطه

$$BK = A_c - A, \tag{۶۱}$$

به فرم زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_1+1}{L_1} & 0 & 0 & \frac{a_3-R_3}{L_1} \\ 0 & \frac{a_2+1}{L_2} & \frac{a_4-R_3}{L_2} & 0 \end{bmatrix}, \tag{۶۲}$$

مثال

ادامه مثال

و جواب آن به فرم رابطه (۶۳) است:

$$K = \begin{bmatrix} k_{۱۱} & k_{۱۲} & k_{۱۳} & k_{۱۴} \\ k_{۲۱} & k_{۲۲} & k_{۲۳} & k_{۲۴} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_۱ + ۱ & ۰ & ۰ & a_۳ - R_۳ \\ ۰ & a_۲ + ۱ & a_۴ - R_۳ & ۰ \end{bmatrix}, \qquad (۶۳)$$

ماتریس رابطه (۶۳) ورودی‌های نامنفی دارد اگر $a_k \geq ۰$ برای $k = ۱, ۲$ و $a_k \geq R_۲$ برای $k = ۳, ۴$.

طبق دو مثال بالا که از مدارهای خطی کسری آورده‌ایم نشان می‌دهد همیشه انتخاب ماتریس سود K امکان پذیر نیست مگر اینکه در دو شرط زیر صدق کنند:

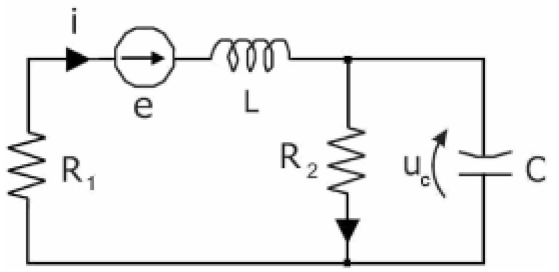
الف. سیستم ماتریس حلقه بسته $A_c \in M_n$.

ب. سیستم حلقه بسته اساسا پایدار مجانبی باشد.

مثال

مثال

سیستم خطی کسری نشان داده شده در شکل ۲ با مقاومت R_1 و $\acute{R}_2$ ظرفیت خازن C اندوکتانس(ظرفیت القای مغناطیسی) L و منبع و ولتاژ e را در نظر بگیرید:



شکل: مدار الکتریکی

مثال

ادامه مثال

با استفاده از روابط

$$i_c(t) = C\frac{d^{\alpha}u_c(t)}{dt^{\alpha}}, \quad ۰ < \alpha < ۱, \tag{۶۴}$$

و

$$u_L(t) = L\frac{d^{\beta}i_L(t)}{dt^{\beta}}, \quad ۰ < \beta < ۱, \tag{۶۵}$$

و قانون دوم کیرشهف به معادله حالت مدار می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{\alpha}u_C}{dt^{\alpha}} \\ \frac{d^{\beta}i}{dt^{\beta}} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} u_C \\ i \end{bmatrix} + Be, \tag{۶۶}$$

مثال

ادامه مثال

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{R_۲ C} & \frac{۱}{C} \\ -\frac{۱}{L} & -\frac{R_۱}{L} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ۰ \\ \frac{۱}{L} \end{bmatrix}. \tag{۶۷}$$

ماتریس A متزلر نیست اما $B \in \mathbb{R}_+^۲$. به سادگی می‌توان نشان داد که شرایط (۶۰) برای رابطه (۶۸) برقرار است:

$$A_c = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{R_۲ C} & \frac{۱}{C} \\ -\frac{a}{L} & -\frac{b-R_۱}{L} \end{bmatrix}, \quad a, b \geq ۰, \tag{۶۸}$$

مثال

ادامه مثال

و از رابطه (۶۱) به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{a+1}{L} & \frac{b}{L} \end{bmatrix}, \tag{۶۹}$$

و

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+1 & b \end{bmatrix}. \tag{۷۰}$$

در این حالت چندجمله‌ای مشخصه ماتریس رابطه (۶۸) به شکل زیر است:

$$p(s) = \begin{vmatrix} s^{\alpha} + \frac{1}{R_2 C} & -\frac{1}{c} \\ -\frac{a}{L} & s^{\beta} + \frac{R_1 - b}{L} \end{vmatrix} = s^{\alpha+\beta} + \frac{R_1 - b}{L} s^{\alpha} + \frac{1}{R_2 C} s^{\beta} + \frac{R_1 - aR_2 - b}{R_2 C L}, \tag{۷۱}$$

ممکن است مقادیر پارامترهای a و b طوری انتخاب شوند که سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی باشد.

پایداری سیستم‌های خطی دو بعدی کسری شرح داده شده توسط مدل راسر

سیستم‌های خطی دوبعدی کسری شرح داده شده با معادلات حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} \delta_\alpha^h x_{i+1,j}^h \\ \delta_\beta^v x_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_{ij} \tag{۷۲}$$

$$y_{ij} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{bmatrix} + Du_{ij}, \quad i,j \in \mathbb{Z}_+, \tag{۷۳}$$

که می‌توان با استفاده از تعاریف بالا رابطه (۷۲) را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} x^h_{i+1,j} \\ x^v_{i,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & A_{12} \\ A_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h_{i,j} \\ x^v_{i,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_{ij} - \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{i+1} c_\alpha(k) x^h_{i-k+1,j} \\ \sum_{l=2}^{j+1} c_\beta(l) x^v_{i,j-l+1} \end{bmatrix}, \qquad (74)$$

که در آن $\bar{A}_{11} = A_{11} + \alpha I_{n_1}$ و $\bar{A}_{22} = A_{22} + \beta I_{n_2}$.

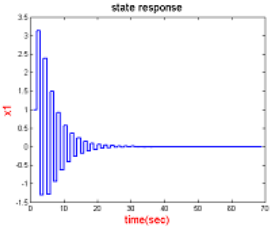
که می‌توان با استفاده از تعاریف بالا رابطه (۷۲) را به صورت زیر بنویسیم:

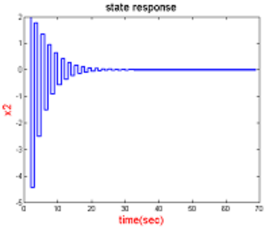
$$\begin{bmatrix} x^h_{i+1,j} \\ x^v_{i,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & A_{12} \\ A_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h_{i,j} \\ x^v_{i,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_{ij} - \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{i+1} c_\alpha(k) x^h_{i-k+1,j} \\ \sum_{l=2}^{j+1} c_\beta(l) x^v_{i,j-l+1} \end{bmatrix}, \tag{۷۴}$$

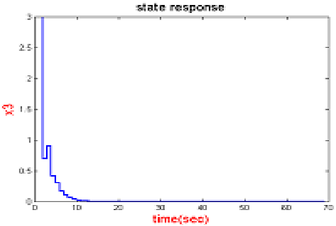
که در آن $\bar{A}_{11} = A_{11} + \alpha I_{n_1}$ و $\bar{A}_{22} = A_{22} + \beta I_{n_2}$.

بنابراین در مسائل کاربردی فرض می‌کنیم k و l با اعداد طبیعی L_1 و L_2 کراندار شده باشند در این حالت رابطه (۷۴) به فرم زیر تبدیل می‌شود:

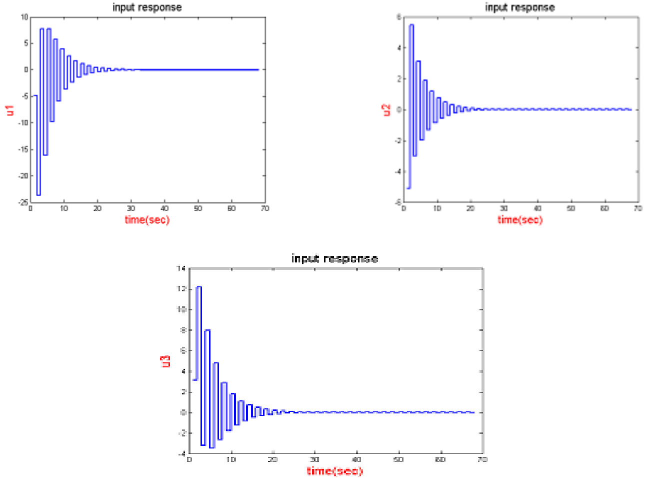
$$\begin{bmatrix} x^h_{i+1,j} \\ x^v_{i,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & A_{12} \\ A_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h_{i,j} \\ x^v_{i,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_{ij} - \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{L_1+1} c_\alpha(k) x^h_{i-k+1,j} \\ \sum_{l=2}^{L_2+1} c_\beta(l) x^v_{i,j-l+1} \end{bmatrix}, \tag{۷۵}$$







شکل: مؤلفه‌های بردار حالت به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.



شکل: مؤلفه‌های بردار ورودی به نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند.

قضیه

مدل مثبت راسر

$$\begin{bmatrix} x^h_{i+1,j} \\ x^v_{i,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h_{ij} \\ x^v_{ij} \end{bmatrix} \tag{76}$$

پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر یکی از شرایط معادل زیر برقرار باشد:

الف. سیستم یک بعدی مثبت

$$x_{i+1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x_i, \tag{77}$$

پایدار مجانبی باشد.

ب. وجود داشته باشد بردار اکیدا مثبت λ که $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$ $(n = n_1 + n_2)$ به‌طوری‌که

$$\begin{bmatrix} A_{11} - I_{n_1} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - I_{n_2} \end{bmatrix} \lambda < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{78}$$

ما دنبال یک ماتریس افزوده K هستیم به‌طوری‌که سیستم حلقه بسته

$$\begin{bmatrix} x^h_{i+1,j} \\ x^v_{i,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} + B_1 K_1 & A_{12} + B_1 K_2 \\ A_{21} + B_2 K_1 & \bar{A}_{22} + B_2 K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h_{ij} \\ x^v_{ij} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{i+1} c_\alpha(k) x^h_{i-k+1,j} \\ \sum_{l=2}^{j+1} c_\beta(l) x^v_{i,j-l+1} \end{bmatrix} \qquad (79)$$

مثبت و پایدار مجانبی باشد.

قضیه

سیستم حلقه بسته کسری مثبت (۷۹) مثبت و پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد ماتریس بلوک قطری

$$\Lambda_k = diag[\lambda_{k۱},\cdots,\lambda_{kn_k}],\ \ \lambda_{kj} > ۰, \quad k = ۱,۲,\ j = ۱,\cdots,n_k, \tag{۸۰}$$

و ماتریس حقیقی $D = \begin{bmatrix} D_۱ & D_۲ \end{bmatrix}$ که صدق کنند در شرایط

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{۱۱}\Lambda_۱ + B_۱D_۱ & A_{۱۲}\Lambda_۲ + B_۱D_۲ \\ A_{۲۱}\Lambda_۱ + B_۲D_۱ & \bar{A}_{۲۲}\Lambda_۲ + B_۲D_۲ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, \tag{۸۱}$$

و

$$\begin{bmatrix} A_{۱۱}\Lambda_۱ + B_۱D_۱ & A_{۱۲}\Lambda_۲ + B_۱D_۲ \\ A_{۲۱}\Lambda_۱ + B_۲D_۱ & A_{۲۲}\Lambda_۲ + B_۲D_۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱_{n_۱} \\ ۱_{n_۲} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \tag{۸۲}$$

که

$$K = \begin{bmatrix} K_۱ & K_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_۱\Lambda_۱^{-۱} & D_۲\Lambda_۲^{-۱} \end{bmatrix}. \tag{۸۳}$$

قضیه

مدل کسری مثبت راسر ناپایدار است اگر حداقل یک ورودی قطر از ماتریس

$$\begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} \end{bmatrix}, \tag{۸۴}$$

مثبت باشد.

مثال

مثال

با توجه به مدل کسری راسر با $\alpha = ۰.۴$ و $\beta = ۰.۵$ و

$$\begin{aligned} A_{۱۱} &= \begin{bmatrix} -۰.۵ & -۰.۱ \\ ۰.۱ & ۰.۰۱ \end{bmatrix}, \quad & A_{۱۲} &= \begin{bmatrix} -۰.۱ & -۰.۱ \\ ۰.۲ & ۰.۱ \end{bmatrix}, \\ A_{۲۱} &= \begin{bmatrix} -۰.۳ & -۰.۱ \\ ۰.۲ & ۰.۱ \end{bmatrix}, \quad & A_{۲۲} &= \begin{bmatrix} -۱ & -۰.۱ \\ ۰.۴ & ۰.۱ \end{bmatrix}, \\ B_{۱} &= \begin{bmatrix} -۰.۲ \\ ۰.۱ \end{bmatrix}, \quad & B_{۲} &= \begin{bmatrix} -۰.۳ \\ ۰.۲ \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{۸۵}$$

باید ماتریس افزوده K که $K = \begin{bmatrix} K_{۱} & K_{۲} \end{bmatrix}$، $K_p \in \mathbb{R}^{۱\times۲}$، $p = ۱, ۲$ را طوری پیدا کنیم که سیستم حلقه بسته مثبت و پایدار مجانبی باشد.

مثال

ادامه مثال

این سیستم ناپایدار است چون ماتریس

$$\begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰.۵ & -۰.۱ & -۰.۱ & -۰.۱ \\ ۰.۱ & ۰.۰۱ & ۰.۲ & ۰.۱ \\ -۰.۳ & -۰.۱ & -۱ & -۰.۱ \\ ۰.۲ & ۰.۱ & ۰.۴ & ۰.۱ \end{bmatrix}, \tag{۸۶}$$

دو ورودی قطری مثبت دارد. با استفاده از روش بیان شده داریم:

مثال

ادامه مثال

گام اول: انتخاب می‌کنیم

$$\Lambda_۱ = blockdiag[\Lambda_۱, \Lambda_۲], \quad \Lambda_۱ = \begin{bmatrix} ۰.۴ & ۰ \\ ۰ & ۰.۴ \end{bmatrix}, \quad \Lambda_۲ = \begin{bmatrix} ۰.۲ & ۰ \\ ۰ & ۰.۳ \end{bmatrix}, \tag{۸۷}$$

و

$$D = [D_۱, D_۲], \qquad D_۱ = D_۲ = \begin{bmatrix} -۰.۴ & -۰.۲ \end{bmatrix}, \tag{۸۸}$$

که شرایط (۸۱) و (۸۲) برقرارند

مثال

ادامه مثال

زیرا

$$\bar{A}_{11}\Lambda_1 + B_1D_1 = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.144 \end{bmatrix},\ A_{12}\Lambda_2 + B_1D_2 = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.01 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix},$$

$$A_{21}\Lambda_1 + B_2D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.02 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \bar{A}_{22}\Lambda_2 + B_2D_2 = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.03 \\ 0 & 0.14 \end{bmatrix},$$

و

$$\begin{bmatrix} A_{11}\Lambda_1 + B_1D_1 & A_{12}\Lambda_2 + B_1D_2 \\ A_{21}\Lambda_1 + B_2D_1 & A_{22}\Lambda_2 + B_2D_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1_{n_1} \\ 1_{n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.05 \\ -0.006 \\ -0.03 \\ -0.01 \end{bmatrix}.$$

مثال

ادامه مثال

گام دوم: از رابطه (۸۳) به ماتریس افزوده $K = [K_۱, K_۲]$ می‌رسیم که

$$K_۱ = \begin{bmatrix} -۰.۴ & -۰.۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲.۵ & ۰ \\ ۰ & ۲.۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & -۰.۵ \end{bmatrix},$$

$$K_۲ = \begin{bmatrix} -۰.۴ & -۰.۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۵ & ۰ \\ ۰ & ۳.۳۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & -۰.۶۷ \end{bmatrix},$$

سیستم حلقه بسته مثبت است زیرا ماتریس‌های

$$\bar{A}_{۱۱} + B_۱K_۱ = \begin{bmatrix} ۰.۱ & ۰ \\ ۰ & ۰.۳۶ \end{bmatrix}, \;\; A_{۱۲} + B_۱K_۲ = \begin{bmatrix} ۰.۳ & ۰.۰۳۳ \\ ۰ & ۰.۰۳۳ \end{bmatrix}$$

$$A_{۲۱} + B_۲K_۱ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰.۰۵ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \;\; \bar{A}_{۲۲} + B_۲K_۲ = \begin{bmatrix} ۰.۱ & ۰.۱ \\ ۰ & ۰.۴۶۷ \end{bmatrix}$$

مثال

ادامه مثال

همه ورودی‌هایشان نامنفی است.

سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی است زیرا چندجمله‌ای مشخصه آن‌ها

$$det\begin{bmatrix} I_{n_۱}z-(A_{۱۱}+B_۱K_۱) & -(A_{۱۲}+B_۱K_۲) \\ -(A_{۲۱}+B_۲K_۱) & I_{n_۲}z-(A_{۲۲}+B_۲K_۲) \end{bmatrix}$$

$$= z^۴ + ۰.۷۷۳z^۳ + ۰.۱۷۳z^۲ + ۰.۰۱z + ۰.۰۰۰۲$$

ضرایب مثبت دارند.

روش پیشنهادی

در این قسمت روشی نو جهت کنترل بهینه زمانی و پایداری سیستم‌های خطی دوبعدی کسری گسسته زمانی راسر ارایه شده است. که در سه مرحله صورت می‌پذیرد:

مرحله اول. سیستم کسری با تعریف بردار افزوده به سیستم دوبعدی راسر استاندارد تبدیل می‌شود.
مرحله دوم. با استفاده از این ویژگی که پایداری سیستم‌های دو بعدی گسسته هم‌ارز پایداری سیستم‌های یک بعدی نظیرش می‌باشد، با استفاده از تبدیلات تشابهی مقدماتی، سیستم به‌دست آمده به‌فرم همدم برداری تبدیل شده و با استفاده از آن ماتریس پس‌خورد حالتی که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته اختصاص می‌دهد، محاسبه می‌کنیم.
مرحله سوم. ماتریس پس‌خورد حالتی که مقادیر ویژه‌ی دلخواه را به سیستم حلقه بسته اختصاص می‌دهد.

مثال

مثال

سیستم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\bar{x}(i+۱) = \bar{A}\bar{x}(i) + \bar{B}u(i)$$

که در آن

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}, \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

روش پیشنهادی

فرم استاندارد اشلون را با استفاده از عملیات تشابهی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\widehat{B}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix},\ \widehat{A}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۵ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۴ & ۵ \\ ۱ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۴ \end{bmatrix},\ T^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

مثال

ادامه مثال

حال در مرحله بعدی ماتریس افزوده Q را به فرم استاندارد اشلون $\widehat{Q} = [\widehat{B}, \widehat{A}, T^{-1}]$ تبدیل می‌کنیم. سپس با انجام عملیات ستونی مقدماتی روی ماتریس $\widehat{A}$ و به دنبال آن عملیات سطری مقدماتی نظیر بر روی $\widehat{Q}$ انجام می‌دهیم که در نتیجه ماتریس $\widehat{Q}$ به فرم همدم برداری $\widetilde{Q} = [\widetilde{B}, \widetilde{A}, S^{-1}T^{-1}]^{-1}$ تبدیل می‌شود. که $\widehat{Q}$ به دست می‌آید:

$$\widehat{Q} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۵ & -۴ & ۱ & -۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۴ & ۵ & ۰ & ۰ & ۱ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۴ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

مثال

ادامه مثال

که با توضیحات گفته شده خواهیم داشت $\widetilde{Q} = [\widetilde{B}, \widetilde{A}, S^{-۱}T^{-۱}]$ که

$$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ \dots & \dots \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۵ & -۴ \\ ۰ & ۴ & ۴ & ۵ \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \quad S^{-۱}T^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

لذا ناورداهای کرونکر زوج $(\bar{B}, \bar{A})$ منظم هستند و عبارتند از: $p_۱ = ۲ \, , \, p_۲ = ۲$

مثال

ادامه مثال

حال در گام ۴: m سطر اول $\widetilde{B}$ را $B_.$ و m سطر اول $\widetilde{A}$ را $G_.$ می‌نامیم.
در گام ۵: ماتریس پس‌خورد حالت سیستم همدم برداری را به‌صورت $\widetilde{F}_p = -B_.^{-1} G_.$ محاسبه می‌کنیم.
در گام ۶: ماتریس پس‌خورد حالت اولیه زوج $(\bar{B}, \bar{A})$ را به‌صورت $\bar{F}_p = \widetilde{F}S^{-1}T^{-1}$ به‌دست می‌آید.

$$\widetilde{F} = -B_.^{-1} G_. = -\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۵ & -۴ \\ ۰ & ۴ & ۴ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۵ & ۴ \\ ۰ & -۴ & -۴ & -۵ \end{bmatrix}$$

$$\bar{F}_p = \widetilde{F}_p S^{-1} T^{-1} = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۵ & ۴ \\ ۰ & -۴ & -۴ & -۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۵ & ۲ & -۱ \\ ۰ & -۴ & -۴ & -۱ \end{bmatrix}$$

مثال

$$\widetilde{\Gamma} = \widetilde{A} + \widetilde{B}\widetilde{F}_p = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۵ & -۴ \\ ۰ & ۴ & ۴ & ۵ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ \cdots & \cdots \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۵ & ۴ \\ ۰ & -۴ & -۴ & -۵ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\widetilde{\Gamma}$ صفر است.

مثال

ادامه مثال

از آن‌جایی که ماتریس پس‌خورد حالت به‌دست آمده، مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته را به صفر می‌برد، باید رد ماتریس $\bar{\Gamma}$ صفر شود لذا برای آزمون آن کافی است رد ماتریس $\bar{\Gamma}$ را محاسبه کنیم. همان‌طور که مشاهده می‌شود $\mathrm{trace}(\bar{\Gamma}) = ۰$ می‌باشد.

با توجه به اینکه ناورداهای کرونکر زوج $(\bar{B}, \bar{A})$ عبارتند از: $p_۱ = ۲ \ , \ p_۲ = ۲$ لذا سیستم توصیف شده

$$\bar{x}(i+۱) = \bar{A}\bar{x}(i) + \bar{B}u(i) \qquad (۸۹)$$

کنترل بهینه زمانی بوده و در دو گام به حالت تعادل صفر می‌رسد.

مثال

مثال

سیستم دوبعدی گسسته زمانی کسری راسر با $\alpha = ۰.۵$ و $\beta = ۱.۲$ در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
A_{۱۱} &= \begin{bmatrix} ۰.۶ & .۱ \\ ۰.۱ & ۰.۷ \end{bmatrix}, & A_{۱۲} &= \begin{bmatrix} -۰.۱ & ۰.۳ \\ ۰ & -۰.۲ \end{bmatrix}, \\
A_{۲۱} &= \begin{bmatrix} -۰.۴ & ۰.۲ \\ ۰ & -۰.۵ \end{bmatrix}, & A_{۲۲} &= \begin{bmatrix} ۰.۱ & ۰.۲ \\ -۰.۱ & ۰.۳ \end{bmatrix}, \\
B_{۱} &= \begin{bmatrix} ۰.۲ \\ ۰.۱ \end{bmatrix}, & B_{۲} &= \begin{bmatrix} -۰.۱ \\ ۰.۳ \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{۹۰}
$$

باید ماتریس افزوده K که $K = \begin{bmatrix} K_۱ & K_۲ \end{bmatrix}$، طوری بیابیم که سیستم حلقه بسته پایدار و مقادیر ویژه

$$\Lambda = \{\pm ۰.۱, \pm ۰.۲, \pm ۰.۳, \pm ۰.۴, \pm ۰.۵, \pm ۰.۶\}$$

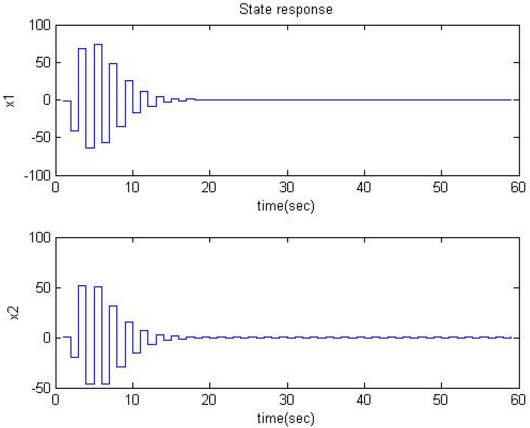
را به سیستم تخصیص می دهیم. داریم:

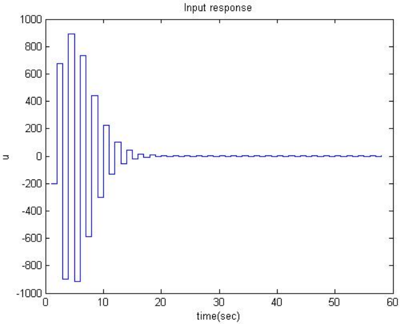
مثال

$$\begin{bmatrix} ۱.۱ & ۰.۱ & ۰.۱۲۵ & ۰ & ۰.۱۲۵ & ۰ & -۰.۱ & ۰.۳ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰.۱ & ۱.۲ & ۰ & ۰.۱۲۵ & ۰ & ۰.۱۲۵ & ۰ & -۰.۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۰.۱ & ۰.۳ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱.۳ & ۰.۲ & -۰.۱۲ & ۰ & ۰.۰۶۲۵ & ۰ \\ ۰ & -۰.۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۰.۱ & ۱.۵ & ۰ & -۰.۱۲ & ۰ & ۰.۰۶۲۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \widetilde{B} = \begin{bmatrix} ۰.۲ \\ ۰.۱ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ -۰.۱ \\ ۰.۳ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$K = ۱۰۰۰ \begin{bmatrix} ۱.۲۸۹۷ & ۱.۷۵۸۱ & ۰.۲۰۶۱ & ۰.۲۲۰۵ & ۰.۱۱۹۹ & ۰.۱۳۸۷ & -۰.۲۸۹۱ & -۱.۵۵۹۲ & ۰.۰۱۳۶ & ۰.۰۸۳۷ & -۰.۰۱۵۲ & -۰.۰۶۸۳ \end{bmatrix}$$

مثال





شکل: نمودار مربوط به مولفه ورودی

مثال

ادامه مثال

شکل های (۳۸) و (۳۸) پایداری را با فرض

$$x_. = [-۱, ۰.۵, ۳, ۱, -۰.۵, -۳, -۱, ۰.۵, ۳, ۱, -۰.۵, -۳]^T$$

نشان خواهد داد.

نتیجه گیری و پیشنهادات

نتیجه گیری و پیشنهادات

۱. ملاحظات می‌توانند به آسانی برای سیستم‌های خطی دوبعدی کسریتاخیری توسعه داده شوند. یک بسط از این ملاحظات برای سیستم‌های کسری دوبعدی خطی پیوسته زمانی به عنوان یک مساله باز است.
هم‌چنین یک کلاس جدید از سیستم‌های خطی مثبت کسری با مرتبه‌های مختلف کسری معرفی شده است. راه حلی برای مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل خطی که با مرتبه‌های مختلف کسری بود به دست آمد. با استفاده از تبدیل لاپلاس نشان داده شد که سیستم خطی کسری مثبت است اگر و تنها اگر ماتریس سیستم یک ماتریس متزلر و ماتریس B دارای مدخل نامنفی بوده است.

۲. هم‌چنین نشان داده شده است که مدارهای الکتریکی خطی سیستم‌های مثبت با دستورات مختلف کسری هستند. اگر یک ماتریس افزوده حاصل از بازخورد حالت ماتریس سیستم حلقه بسته باشد سپس ماتریس، ماتریس متزلر است اگر و تنها اگر شرایط (۶۰) برقرار باشد.

۳. در ادامه این پایان نامه می‌توان روی کنترل پذیری سیستم‌های چند بعدی، سیستم‌های دوبعدی کسری توسیع یافته، ... خطی کسری بهره جست.

مراجع

A.E Bryson and Ho، Y.C.
Applied Optimal Control،

A. Yildirim، and S.T. Mohyud-Din، and D.H. Zhang، ، year=۲۰۱۰
Analytical solutions to the pulsed Klein-Gordon equation using modified variational iteration method (MVIM) and Boubaker polynomials expansion scheme (BPES)،

B. Kafash، and A. Delavarkhalafi، and S M. Karbassi،
Application of Chebyshev polynomials to derive efficient algorithms for the solution of optimal control problems،

B. Kafash، and A. Delavarkhalafi، and S.M. Karbassi،
A Numerical Approach for Solving Optimal Control Problems Using the Boubaker Polynomials Expansion Scheme،


با تشکر از حسن توجه شما